Diviser un triangle au Moyen Âge : l'exemple des géométries pratiques latines.

Marc Moyon

Diviser un triangle au Moyen Âge : l'exemple des géométries pratiques latines.

Marc Moyon
Centre d'Histoire des Sciences et d'Epistémologie de Lille1
UMR 8163 « Savoirs, Textes, Langage »

« Ce serait honteux pour quelqu'un de pratiquer quelque art que ce soit et d'ignorer ce que celui-ci est, son genre, de quel sujet il traite et toutes les autres choses qui le précèdent. »

Dominicus Gundissalvo (m. 1181)[1]
De divisione philosophiae [Des divisions de la philosophie],

Enseignant de mathématiques dans le secondaire (et en particulier en milieux dits difficiles), j'ai toujours envisagé mon enseignement selon deux orientations complémentaires : une formation à l'esprit scientifique et une formation à la citoyenneté. C'est dans cette optique que l'introduction d'une perspective historique dans mon enseignement a, pour une part, été réfléchie. Je remarque que les élèves du collège se construisent une idée relativement fausse de ce que sont les mathématiques et de qui sont ses principaux acteurs. En général, un mathématicien ne travaille pas isolé de tout contexte de recherche ou d'enseignement. Il s'insère aussi naturellement dans l'histoire de sa discipline à la suite de ses prédécesseurs dont il peut confirmer ou infirmer les idées. De même, les principaux résultats mathématiques n'apparaissent pas *ex nihilo*. Ils germent plus ou moins longtemps avant de participer à la naissance d'une nouvelle discipline ou à l'élaboration d'une nouvelle théorie. Il faut aussi préciser l'importance de l'environnement social et culturel des activités mathématiques. En effet, de nombreux problèmes naissent de préoccupations quotidiennes. Les sciences en général et les mathématiques en particulier

[1] Dès qu'un auteur est cité pour la première fois, son nom est suivi, entre parenthèses, de la date de sa mort lorsqu'elle est connue (par exemple, m. 1181) ou bien de sa période d'activité attestée (par exemple, act. 1116-1142). Lorsque trop peu d'informations fiables sont connues, j'indiquerai seulement son siècle.

suivent les sociétés dans lesquelles elles se développent. Inversement, elles permettent des progrès majeurs de celles-ci.

Certains noms de mathématiciens occupent un quasi-monopole dans les classes de collège. La plupart d'entre eux se rapportent à l'Antiquité grecque, avec notamment Euclide (III^{e} s. av. J.C.) ou encore les deux mathématiciens du VI^{e} siècle avant J.C. dont les biographies ne sont que peu voire pas connues : Pythagore et Thalès. Cette remarque suffit à suggérer l'image restrictive des mathématiques que l'on transmet à nos élèves. Dans ce chapitre, mon idée est de montrer comment des problèmes simples de géométrie plane sont posés et résolus dans l'histoire des mathématiques et dans l'histoire des groupes sociaux qui y ont réfléchi, quelle que soit leur origine.

Je me consacre ici, de manière exclusive, aux problèmes de divisions des figures planes. Découper ou diviser une figure plane revient à partager celle-ci selon des contraintes fixées *a priori*. Ces contraintes sont relatives aux propriétés géométriques de la (des) transversales(s) ou des figures désirées, et sont liées aux grandeurs avec des conditions de rapport sur les parties issues du découpage. Il s'agit, par exemple, de diviser un parallélogramme ABCD donné, selon un rapport connu $\frac{m}{n}$, par une droite parallèle à deux de ses côtés (cf. fig. 1). Le problème peut être, aussi, de découper un triangle donné en neuf triangles semblables (cf. fig. 2).

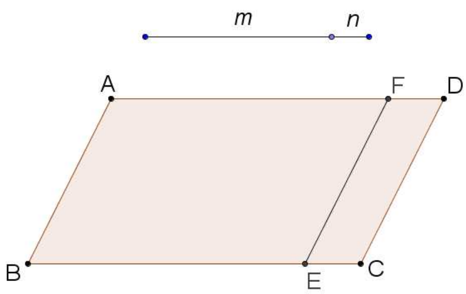


Figure 1

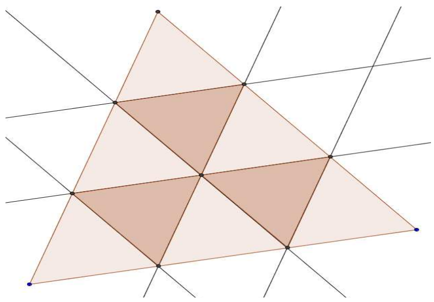


Figure 2

Une présentation historique succincte de ces problèmes permet de dégager l'importance d'une « tradition » mathématique trop souvent réduite à un rôle de transmetteur, à l'Europe latine, de la science grecque : celle des mathématiques arabes. Ici, il faut comprendre l'arabité au sens de la langue utilisée pour la rédaction et l'enseignement de la science. Ce terme ne fait absolument pas référence à des origines géographiques et culturelles précises. De nombreux foyers scientifiques vont émerger, dès le VIII^{e} siècle, dans les pays d'islam qui forment un empire-monde s'étendant progressivement de Samarkand à Saragosse (d'Est en Ouest) et des Pyrénées à Tombouctou (du Nord au Sud). Enfin, avec l'avènement de l'islam, la langue arabe est d'abord un instrument de transfert des savoirs anciens (essentiellement grecs et indiens), puis la langue de communication scientifique[2].

[2] D. Gutas, *Pensée grecque, culture arabe*, Aubier, Paris, 2005.

Après un prologue historique, je proposerai plusieurs énoncés de problèmes accompagnés de leurs résolutions. Tous relatifs à la division du triangle, ils sont tirés de la littérature latine médiévale qui reste relativement peu connue.

UN PEU D’HISTOIRE…

Les problèmes de division des figures planes constituent un chapitre ancien et récurrent des mathématiques. Ils se rencontrent dans de nombreuses traditions, de la Mésopotamie[3] jusqu’à la Renaissance européenne avec plusieurs traités de géométrie pratique comme, par exemple, celui de Christophe Clavius (m. 1612) ou encore celui de Simon Stevin (m. 1620).

Ces problèmes sont aussi largement traités dans les ouvrages mathématiques des pays d’islam où ils sont développés selon deux orientations qui s’enrichissent mutuellement. La première s’inscrit dans la filiation des mathématiques grecques avec, notamment, la traduction de l’ouvrage d’Euclide *Sur les divisions*, perdu dans sa version grecque[4]. La seconde orientation se nourrit d’une partie du savoir scientifique arabe (géométrie savante, problèmes de mesure de calculs d’aires et de volumes, algèbre) pour résoudre des problèmes pseudo-concrets liés à des sujets de la vie courante comme l’arpentage des terrains, la répartition des héritages ou encore l’architecture et la décoration. De nombreux auteurs abordent ces problèmes dans leurs ouvrages classés parmi la science du mesurage soit de manière indépendante, soit sous la forme d’un chapitre. Abû l-Wâfâ’ al-Bûzajanî (m. 998), al-Kârajî (m. 1023) ou bien ^{c}Abd al-Qâhir ibn Tâhir al-Baghdâdî (XI^{e} s.) peuvent être cités pour l’Orient musulman. Nous retiendrons enfin, pour l’Occident musulman (Maghreb et Andalus) Ibn al-Yâsamîn (m. 1204) ainsi que Muhammad al-Mursî et Ibn al-Jayyâb, deux mathématiciens du XIII^{e} siècle[5].

Pour comprendre comment les problèmes de division des figures peuvent répondre à des questions culturelles et sociétales, je propose ici deux exemples. Le premier est emprunté au *Kitâb fîmâ yahtâju ilayhi as-sani^{c} min a^{c}mâl al-handasa* [Livre de ce qui est nécessaire à l’artisan en constructions géométriques] d’Abû l-Wafâ’. Dans ce problème, il s’agit de construire un carré à partir du découpage de trois carrés identiques[6]. La construction produit un élément d’ornementation qui a inspiré de nombreux artisans décorateurs des pays d’islam (cf. fig. 3).

---

[3] J. Friberg, *Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics*, World Scientific Publishing Company, Singapore, 2007.

[4] M. Moyon, *La géométrie pratique en Europe en relation avec la tradition arabe, l'exemple de mesurage et du découpage : Contribution à l'étude des mathématiques médiévales*, Thèse de doctorat en Épistémologie et Histoire des Sciences sous la direction de Ahmed Djebbar, Lille, 2008, vol. 1, chap. 2.

[5] A. Djebbar, « La géométrie du mesurage et du découpage dans les mathématiques d'al-Andalus (X^{e}-XIII^{e} s.) », in *Liber Amicorum Jean Dhombres*, Patricia Radelet de Grave (éd), Centre de recherche en histoire des sciences, Louvain la Neuve, 2007, p. 113-147.

[6] Abû l-Wafâ’, *Kitâb fî mâ yahtâju ilayhi as-sani^{c} min a^{c}mâl al-handasa* [Livre de ce qui est nécessaire à l’artisan en constructions géométriques], édition de al-^{c}Ali, Imprimerie de Bagdad, Bagdad, 1979, p. 150-151.

Nous divisons deux carrés en deux moitiés selon les diamètres, et nous appliquons chacune d'elles à l'un des côtés du troisième carré, en mettant l'angle demi droit de <chaque> triangle sur l'un des angles du carré et sa diagonale sur le côté <du carré>. Alors, une partie du triangle dépasse du côté de l'autre angle <du carré>. Puis nous joignons les angles droits des triangles à l'aide de lignes droites. Ce sera le côté du carré cherché. Alors, de chaque grand triangle, se sépare un petit triangle que nous coupons et que nous déplaçons vers le triangle apparaissant sur l'autre côté[7].

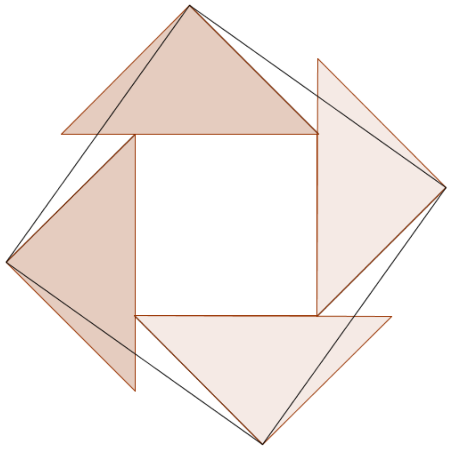


Figure 3

Le second exemple est l'énoncé d'un problème de mesurage du *Takmila fî l-hisâb* [La complétion en calcul] d'Ibn Tâhir al-Baghdâdî : « Par exemple, une terre vingt fois trente, et on veut la partager entre trois frères, et faire dans celle-ci une route de largeur deux coudées. On enlève la route du côté qui mesure trente, et on a besoin de savoir combien doit être la longueur de cette route. (…) Si le partage était entre deux fils et une fille, le partage sera sur cinq parts. Et si le partage était entre deux filles et un fils, le partage sera sur quatre parts. »[8]

À partir du XIII^e^ siècle, le latin devient la langue porteuse de tout l'héritage antique auquel il faut ajouter la connaissance de la science des pays d'islam. La géométrie, et en particulier les pratiques de division des figures, ne fait pas exception. En effet, notamment grâce à l'important mouvement de traduction lié à l'Andalus du XII^e^ siècle, l'Europe latine va s'approprier une partie des savoirs géométriques disponibles en arabe dans la région qu'ils soient d'origine grecque – Euclide, Apollonius (II^e^ s. av. J.C.), Archimède (m. 212 av. J.C.), Ménélaüs (I^er^ s. av. J.C.), Ptolémée (II^e^ s.) entre autres –, ou dans leurs prolongements et développements originaux arabes – les frères Banû Mûsâ (IX^e^ s.), Thâbit ibn Qurra (m. 901) ou Ibn al-Haytham (m. 1041) par exemple.

Au moment où de nombreux lettrés du XII^e^ siècle, comme Gérard de Crémone (m. 1187), Adélard de Bath (act. 1116-1142) ou encore Platon de Tivoli (act. 1132-1146) affluent de toute l'Europe pour appréhender la science et la philosophie écrites en arabe, une production scientifique originale continue à se développer, et notamment dans le milieu hébraïque. C'est le cas, par exemple, pour le mathématicien Abraham Bar Hiyya (m. vers 1145) qui rédige plusieurs ouvrages dont le *Livre sur le mesurage et le calcul*. Il y

---

[7] A. Djebbar, *Textes géométriques arabes* (IX^e^-XV^e^ siècles), IREM de Dijon, Dijon, 2009, p. 24-25.

[8] M. Moyon, « Mathématiques et interculturalité : l'exemple de la division des figures planes », in *Mathématiques et interculturalité*, Saïd Belmehdi et Marc Moyon (éds), Lille, avril 2009, à paraître.

propose plusieurs problèmes de division des surfaces. Du vivant de son auteur, cet ouvrage est remanié et traduit en latin par Platon de Tivoli qui nous transmet le *Liber embadorum* [Livre des surfaces][9].

Lorsque Leonardo Pisano, que l'histoire retiendra sous le nom de Fibonacci, rédige sa *Practica geometriae* en 1220, un ensemble de savoirs géométriques est donc disponible en Europe[10]. D'après la préface qu'il consacre à la deuxième édition de son *Liber Abbaci* (1228), nous savons qu'il est fils d'un administrateur des douanes de Béjaïa (dans l'actuelle Algérie), alors comptoir marchand de Pise. Nous apprenons aussi qu'il aurait été en contact direct avec les pratiques mathématiques des pays d'islam grâce à de nombreux séjours dans les pays méditerranéens, en Algérie *de facto* mais aussi en Syrie, en Égypte, en Grèce, en Sicile et en Provence. La *Practica geometriae* est globalement destinée à deux types de publics : l'un savant pour lequel Fibonacci fait appel aux canons de la géométrie euclidienne avec des démonstrations, l'autre plus usuel pour répondre à d'éventuels praticiens qui ne possèderaient pas les références scolastiques nécessaires. La place accordée aux problèmes de division des figures est importante. En effet, il y consacre une section entière de son ouvrage. Son titre « Sur la division des champs entre copropriétaires » laisserait entrevoir une connaissance de l'utilisation pratique de ce thème, quelle que soit son origine. Le lien avec l'ouvrage d'Abraham Bar Hiyya semble relativement étroit mais aucun élément ne permet de l'affirmer[11].

C'est sur les deux auteurs précédents que mes activités pédagogiques vont principalement reposer puisqu'ils fournissent, tous deux, un exposé très complet et didactique du thème géométrique choisi. Je termine néanmoins ce préambule historique avec deux autres auteurs latins des XIII^e^ et XIV^e^ siècles que j'aborderai aussi. Jordanus de Nemore sur qui peu d'informations biographiques sont disponibles, rédige un ouvrage de géométrie : le *Liber philotegni*[12]. Quelques problèmes de division des figures planes y sont traités. Il semblerait que cet ouvrage ait été le support d'un enseignement à la faculté des Arts. Enfin, Jean de Murs, Maître ès-Arts à la Sorbonne, rédige des ouvrages dans toutes les disciplines du *quadrivium*. Celles-ci sont au nombre de quatre : arithmétique, géométrie, astronomie et musique. Le terme spécifique *quadrivium* et le concept n'apparaissent qu'avec Boèce au début du VI^e^ siècle. Avec les disciplines du *trivium* (grammaire, dialectique, rhétorique), elles formeront le programme d'enseignement des universités médiévales. Dans ce contexte, est attribuée à Jean de Murs une géométrie pratique intitulée *De arte mensurandi* [De l'art du mesurage]. L'ouvrage est largement consacré aux problèmes de mesurage mais on peut aussi y lire quelques problèmes de découpage.

---

9 M. Curtze, « Der Liber Embadorum des Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli », *Abhandlungenn zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften*, vol. XII, 1902, p. 1-183

10 B. Boncompagni, *La practica geometriae di Leonardo Pisano,* Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, Rome, 1862 ; Hughes, 2008)

11 M. Moyon, *La géométrie pratique en Europe en relation avec la tradition arabe, l'exemple de mesurage et du découpage : Contribution à l'étude des mathématiques médiévales*, Thèse de doctorat en Épistémologie et Histoire des Sciences sous la direction de Ahmed Djebbar, Lille, 2008.

12 M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages. Vol. 5 : Quasi-archimedian Geometry in the Thirteenth Century*, University of Wisconsin publications, Philadelphie, 1984.

« DÉCOUPER UN TRIANGLE EN DEUX PARTIES ÉGALES » : POURQUOI ET COMMENT ?

L’énoncé du problème est très simple : il s’agit de « diviser un triangle, quel qu’il soit, en deux parties égales ». Cet énoncé se déclinera dans la suite en plusieurs autres distincts à condition d’ajouter des contraintes sur la division.

Dans un premier temps, je pose ce problème dans le contexte d’un partage équitable. La question pseudo-concrète, s’inspirant alors de situations liées à la vie courante (partage entre copropriétaires, ou entre ayants droit à la suite d’un héritage), peut permettre d’accéder à une meilleure représentation du problème. Suivons ici certains énoncés de la tradition des pays d’islam concernant la répartition des héritages. Comme nous l’avons vu précédemment, ces énoncés se trouvent dans de nombreux manuels de calcul (avec notamment l’utilisation des outils algébriques) ou de géométrie (avec des références aux *Éléments* d’Euclide) : « Un homme décède et laisse à ses deux fils un champ triangulaire. Il s’agit de déterminer, dans le cas d’un partage équitable, la part du champ qui revient à chacun de ses deux fils. » [13] L’énoncé ainsi exprimé ne contient aucune contrainte et laisse l’élève libre dans l’exploitation du problème avec les notions inhérentes de grandeurs et de formes.

Une fois le problème énoncé, j’ai engagé un débat dans la classe pour comprendre ce que représente l’égalité de deux figures, c’est-à-dire l’égalité en aire indépendamment de la forme des figures. Il est aussi important que l’échange aide les élèves à percevoir la non-unicité du partage du triangle. Ceux-ci doivent être amenés à formuler plusieurs partages différents sans nécessairement les résoudre a priori. Une ébauche de solution, ou les idées directrices d’une démonstration peuvent néanmoins être énoncées oralement. Cette phase doit permettre aux élèves de prendre conscience de la richesse et de la variété de la démarche mathématique.

J’ai alors posé trois problèmes différents en ajoutant quelques unes des contraintes qui ont été suggérées par les élèves au cours de la discussion précédente. Ces trois problèmes sont présents aussi bien dans la *Practica geometriae* de Fibonacci, que dans le *Liber embadorum* de Platon de Tivoli pour ne prendre que ces deux exemples. Ils ont fait l’objet d’une recherche individuelle ou collective au cours de laquelle les élèves ont été amenés à conjecturer une (ou plusieurs) construction(s) du partage équitable. J’ai alors jugé opportun d’expérimenter les solutions envisagées à l’aide d’un logiciel de géométrie dynamique qui, dans ce cadre, a facilité l’autonomie, la prise d’initiative des élèves et donc la formulation de conjectures.

[13] M. Moyon, *La géométrie pratique en Europe en relation avec la tradition arabe, l'exemple de mesurage et du découpage : Contribution à l'étude des mathématiques médiévales*, Thèse de doctorat en Épistémologie et Histoire des Sciences sous la direction de Ahmed Djebbar, Lille, 2008, vol. 1, p. 89-112.

PREMIER PROBLÈME : « PARTAGER UN TRIANGLE EN DEUX PARTIES ÉGALES PAR UNE DROITE PASSANT PAR UN DE SES SOMMETS. »

Ce problème, très facile, permet un engagement volontaire de tous les élèves dans l'activité de recherche. Le partage, c'est-à-dire la position du point D, est naturel pour la plupart, sinon la totalité, des élèves. Le logiciel de géométrie dynamique n'est alors utilisé que pour conforter la conjecture émise. Cette manipulation est néanmoins intéressante comme préalable aux constructions suivantes.

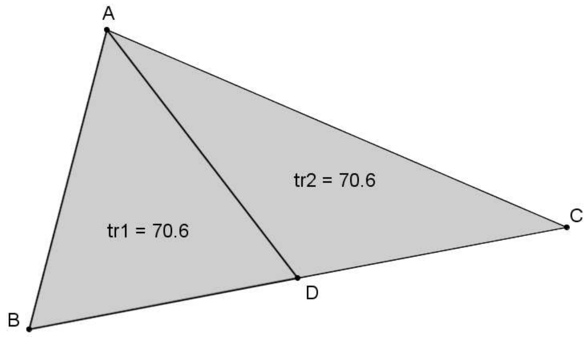


Figure 4

La démonstration de la construction est aussi relativement élémentaire à formaliser. Elle permet de revenir sur les propriétés géométriques du triangle et les relations métriques associées. En effet, le raisonnement de l'élève s'établit naturellement à partir de la formule du calcul de l'aire d'un triangle, à savoir le demi-produit de la base par la hauteur. L'expérience de la classe montre que l'élève a recours au calcul littéral en posant h une hauteur, et b la base relative.

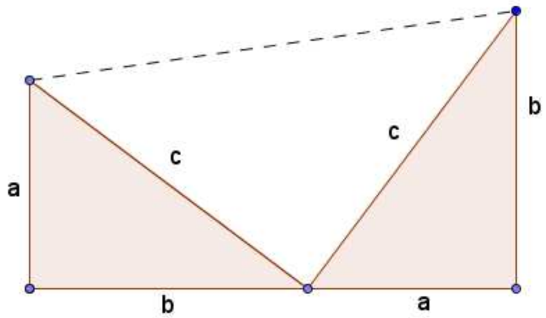
GRANDEURS, ARITHMÉTISATION DES GRANDEURS ET NOMBRES DANS LA GÉOMÉTRIE DE FIBONACCI.

La lecture du texte de Fibonacci s'avère alors intéressante. En effet, le mathématicien pisan propose deux démonstrations. L'une se réfère aux *Éléments* d'Euclide et considère les figures en tant que telles. L'autre est identique à celle de l'élève en considérant le calcul de l'aire de chacun des deux triangles obtenus. Cet extrait permet de montrer aux élèves qu'il n'existe pas une seule et bonne « réponse » à un problème mathématique. Plusieurs démonstrations peuvent être données pour un même énoncé en fonction du registre dans lequel le mathématicien se place. Fibonacci considère, dans le premier cas, l'aire comme une grandeur. Dans le second cas, l'aire est le résultat d'un calcul numérique, c'est-à-dire une grandeur arithmétisée[14]. La distinction entre les grandeurs et les nombres, avec les pratiques inhérentes aux deux quantités, est un enjeu de l'école élémentaire et du collège. Il s'agit d'un double problème d'ordre épistémologique et d'ordre didactique. L'activité présentée ici permet justement, en conciliant les deux approches, de travailler sur cette

[14] E. Barbin, « L'arithmétisation des grandeurs », *Repères IREM*, n°68, 2007, p. 5-20.

difficile distinction. Situons-la dans la progression pédagogique plus générale. Elle est proposée après l'étude du théorème dit « de Pythagore » et de quelques-unes de ses démonstrations. C'est dans ce cadre que je compare deux d'entre elles. La première démonstration est celle de la proposition 47 du Livre I des *Éléments* d'Euclide[15] : « Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit. » Elle repose sur la « méthode des aires », autrement dit la théorie de l'égalité de la grandeur assignée aux figures planes, développée par Euclide tout au long de la seconde partie du premier Livre. La deuxième démonstration vue en classe est, quant à elle, basée sur le calcul littéral et les formules de calcul d'aires du triangle et du trapèze à partir de la figure suivante (cf. fig. 5).

Figure 5



L'aire du trapèze est le demi-produit de la somme des bases par la hauteur, c'est-à-dire :

$$\frac{(a+b)\times(a+b)}{2}=\frac{a^2+b^2+2ab}{2} \quad (*)$$

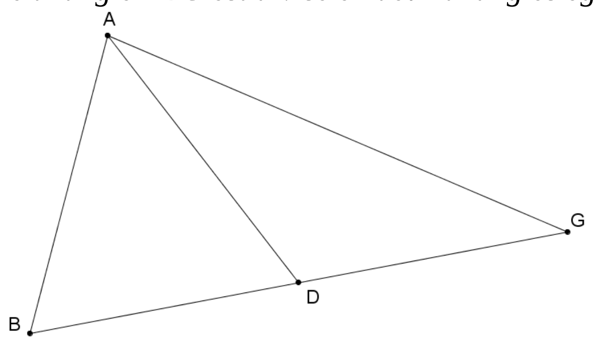
L'aire du trapèze est aussi la somme des aires des trois triangles réunis, c'est-à-dire :

$$\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2} \quad (**)$$

L'identification de (*) et (**) donne le résultat cherché.

En outre, la lecture de cet extrait de la *Practica geometriae* permet d'entrer en contact avec le style d'écriture de l'un des mathématiciens latins les plus importants du XIII^{e} siècle :

> *Ainsi, lorsque tu veux diviser n'importe quel triangle en deux [parties] égales à partir d'un de ses sommets, trace une ligne à partir de ce sommet jusqu'au milieu du côté opposé. Et tu auras ce que tu cherches.*
>
> *Par exemple, nous voulons diviser le triangle ABG en deux [parties] égales à partir du point A.*
>
> *Que soit divisé le côté BG en deux parties égales au point D, et que soit tracée la droite AD. Je dis que le triangle ABG est divisé en deux triangles égaux.*



[15] Euclide, *Les éléments*, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, Presses Universitaires de France, Paris, vol. 1, 1990, p. 282-284.

Les deux triangles ABD et ADG sont égaux l'un à l'autre, puisqu'ils sont construits sur des bases égales, et sous la même hauteur qui est la perpendiculaire menée à partir de A sur la ligne BG. En effet, deux triangles construits l'un et l'autre sous la même hauteur sont comme les bases d'après le début du sixième Livre [d'Euclide]. C'est pourquoi, BD est à DG comme le triangle ABD est au triangle ADG. Comme la base BD est égale à la base DG, alors les deux triangles ABD et ADG sont égaux l'un à l'autre comme ce qui a été dit précédemment.

Ou bien si nous traçons la hauteur issue de A sur la ligne BG, elle-même sera de toute façon la hauteur de chacun des deux triangles ABD et ADG. Le produit de la moitié de la hauteur par les bases BD et DG égale le produit de la moitié de cette même hauteur par la base BG.

Comme du produit de la moitié de la hauteur par les bases BD et DG provient l'aire des triangles ABD et ADG. Alors il est démontré que le triangle ABD est égal au triangle ADG[16].

La lecture de ce passage doit permettre d'articuler la solution du problème avec deux propositions fondamentales des *Éléments* d'Euclide pour notre propos. Il s'agit d'abord de la première proposition du Livre VI explicitement citée par Fibonacci : « Les triangles et les parallélogrammes qui sont sous la même hauteur sont l'un relativement à l'autre comme leurs bases. » [17] Fibonacci cite le résultat général qui fait appel à la notion de rapport de deux grandeurs alors que dans le cas particulier de deux bases égales, il aurait pu citer la proposition 38 du Livre I tout aussi fondamentale que la précédente : « les triangles qui sont sur des bases égales et dans les mêmes parallèles, sont égaux entre eux. » [18] Ce résultat sera central pour le problème suivant.

SECOND PROBLÈME. « PARTAGER UN TRIANGLE EN DEUX PARTIES ÉGALES PAR UNE DROITE PASSANT PAR UN POINT SITUÉ SUR UN DE SES CÔTÉS. »

Même si l'énoncé ne semble pas plus difficile à comprendre que le précédent, la consigne nécessite une explicitation. Les élèves sont sollicités pour donner une reformulation du problème à l'aide d'une figure géométrique sur laquelle les points sont nommés. Pour cela, je me suis aidé de l'extrait précédent où le problème est directement suivi d'une exposition, aussi appelée ecthèse : « Par exemple, nous voulons diviser le triangle ABG… ». Ici, cela pourrait être « Soit ABC un triangle et D un point de [AB]. Nous voulons diviser le triangle en deux parties égales par une droite passant par D. » Ainsi, le point D fixé, l'élève doit trouver la position du point G pour que la droite (DG) coupe ABC

[16] B. Boncompagni, *La practica geometriae di Leonardo Pisano*, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, Rome, 1862, p. 110.

[17] Euclide, *Les éléments*, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, Presses Universitaires de France, Paris, vol. 2, 1994, p. 155.

[18] Euclide, *Les éléments*, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, Presses Universitaires de France, Paris, vol. 1, 1990, p. 264.

en deux parties égales : *trap1* et *trap2*. En fonction de la position de D (cf. figures 6 et 7), le point G appartient soit au côté [BC], soit au côté [AC]. D'ailleurs, j'ai demandé aux élèves de décrire la position limite de D pour que le point G passe du côté [BC] au côté [AC]. Il suffit pour répondre à la question de reprendre le problème précédent.

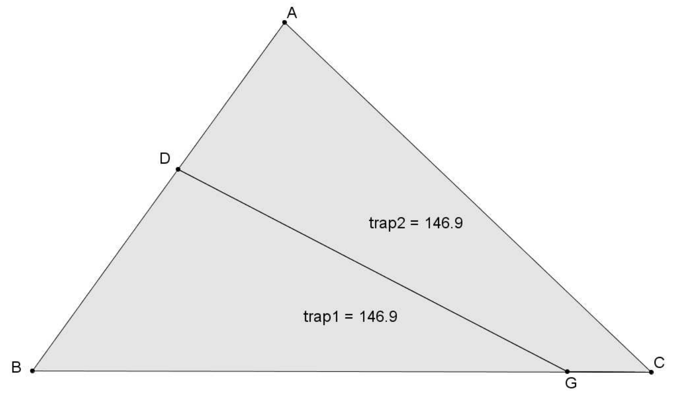


Figure 6

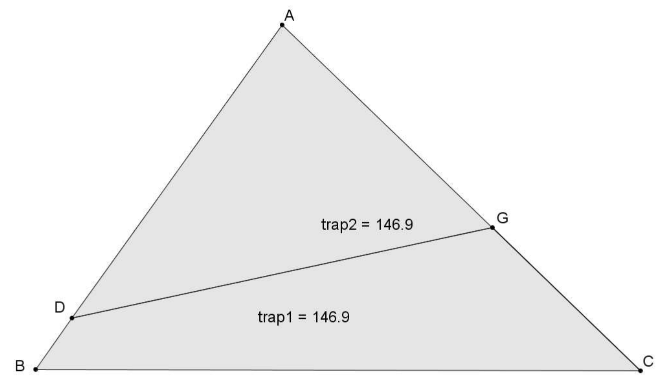
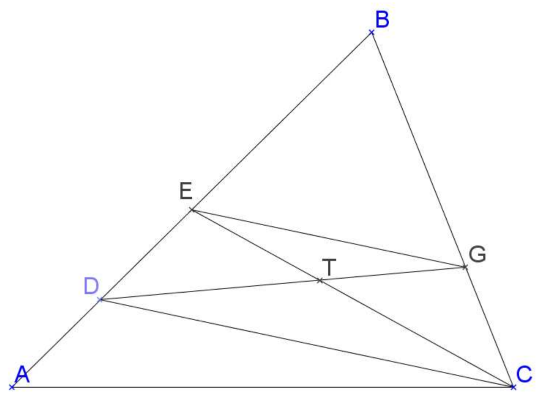


Figure 7

Mais alors, peut-on déterminer précisément la position de G à l'aide d'une construction géométrique universelle ? Pour répondre à cette question, je propose la lecture d'un extrait du *Liber philotegni* de Jordanus de Nemore. En effet, cet auteur médiéval donne, de manière très claire, une construction effective de la transversale qu'il démontre ensuite :

> *Un point [étant] désigné sur un côté quelconque d'un triangle, tracer une droite à partir de celui-ci pour que le triangle soit divisé en deux parties égales.*
>
> *Soit ABC un triangle et D un point donné du côté AB, une droite est tracée du milieu de son côté au sommet C, qu'elle soit CE. Que soit aussi jointe la droite CD. Ensuite, que soit tracée à partir de E une [droite] parallèle à la droite DC, qu'elle soit EG. Que G soit relié avec D ; EC est coupée en T.*



Parce que le triangle CDE est égal au triangle DGC, [la surface] commune [DTC] retranchée, le triangle ETD sera égal au triangle GTC. Alors ajoutés à une [surface] égale [ADTC], la surface arrachée par la droite DTG sera égale au triangle EAC qui est la moitié du triangle tout entier, DG divise alors le triangle en [parties] égales, et ceci est ce qui est proposé[19].

Cette construction met en évidence le rôle clé du milieu E de [AB] qui va servir de levier pour la démonstration. Il est intéressant aussi de mentionner que la position relative de D par rapport à E n'a pas d'importance : D du segment [AE] et D du segment [EB] sont deux situations symétriques.

La deuxième partie du texte, à savoir la démonstration, n'est autre qu'un jeu de compensation (ou couper-coller) dont le raisonnement repose essentiellement sur la proposition 38 du Livre I des *Éléments* d'Euclide que nous avons vue précédemment. Pour éclairer encore la démonstration de Jordanus de Nemore, il est intéressant de visualiser la démarche à l'aide des figures suivantes :

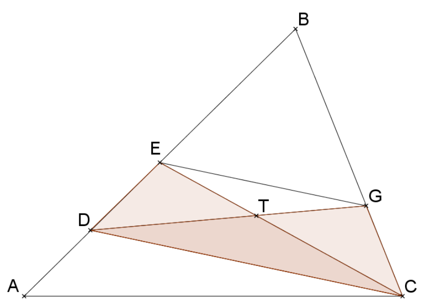


Figure 8

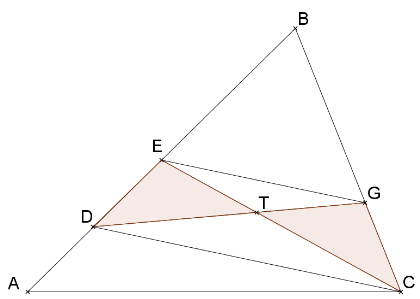


Figure 9

[19] M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages. Vol. 5 : Quasi-archimedian Geometry in the Thirteenth Century*, University of Wisconsin publications, Philadelphie, 1984, p. 216.

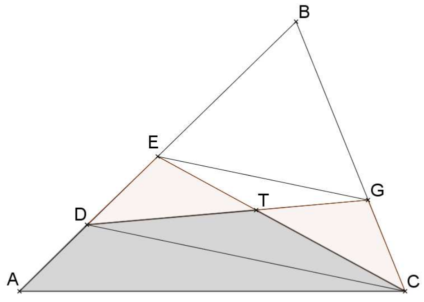


Figure 10

$$CDE = DGC \text{ (cf. fig. 8)}$$
$$EDC - DTC = CDG - DTC \text{ (cf. fig. 9)}$$
$$ETD = GTC$$
$$ETD + ADTC = GTC + ADTC \text{ (cf. fig. 10)}$$
$$\left.\begin{aligned} EAC &= ADGC \\ EAC &= \frac{1}{2} ABC \end{aligned}\right\} ADGC = \frac{1}{2} ABC$$

Cette activité a un prolongement naturel intéressant pour les élèves à l'aise avec la construction proposée par Jordanus de Nemore. S'il s'agit ici du cas particulier de la bissection du triangle, c'est-à-dire de sa division en deux parties égales, il n'est pas difficile de généraliser à sa division selon le rapport $1/3$, ou le rapport $1/4$, voire selon un rapport quelconque p/q (*p*, *q* entiers). Le point E doit alors être placé sur [AB] dans le rapport p/q choisi, c'est-à-dire tel que $\frac{AE}{AB} = \frac{p}{q}$.

TROISIEME PROBLÈME. « PARTAGER UN TRIANGLE EN DEUX PARTIES ÉGALES PAR UNE DROITE PARALLÈLE A UN DE SES CÔTÉS. »

L'utilisation du logiciel de géométrie dynamique ne doit pas poser problème si toute la construction est bien programmée. Dans le cas présent (cf. fig. 11), il suffit de faire varier la position de la droite (DE) parallèle au côté (BC) jusqu'à ce que les deux figures *tri* et *trap* soient d'aires égales.

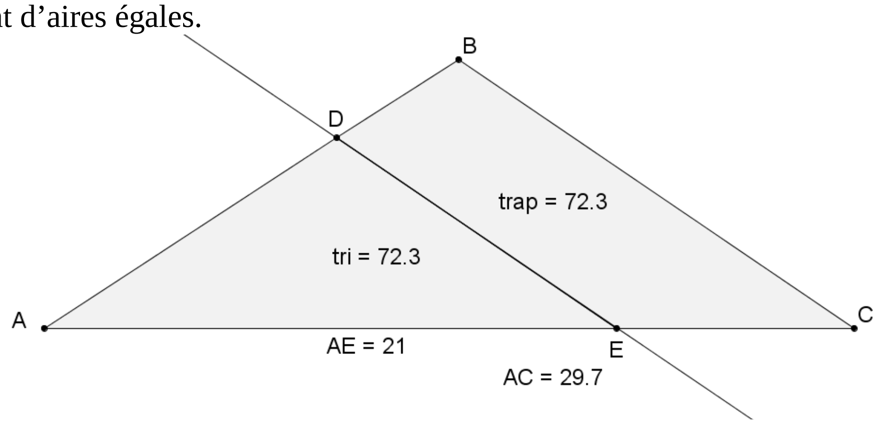


Figure 11

Il est conseillé de paramétrer le logiciel pour donner des valeurs à une décimale, l'approximation est suffisante pour notre problème. Cela empêche d'avoir des aires égales à un ou deux centièmes près, ce qui gêne les élèves dans leurs manipulations. Ces dernières sont ici fondamentales par leur nature heuristique. En effet, le rapport entre les longueurs AE et AC, qui est irrationnel, n'est pas évident à déterminer ni même à conjecturer pour les élèves. Pour l'appréhender, il faut une bonne compréhension du théorème des lignes proportionnelles, dit théorème de Thalès[20] : « Si une droite est menée parallèle à l'un des côtés d'un triangle, elle coupera les côtés du triangle en proportion ; et si les côtés du triangle sont coupés en proportion, la droite jointe entre les [points de] section sera parallèle au côté restant du triangle. »

La lecture du texte de Platon de Tivoli rédigé au XII^e^ siècle sert alors de support à un exercice.

> *Par exemple si tu divises en deux la ligne AB au point D, et la ligne AC au point E tel que le carré de la ligne AD est la moitié du carré de la ligne AB, et que le carré de la ligne AE est la moitié du carré de la ligne AC. Traçant alors la ligne du point D au point E, le triangle ABC [est divisé] en deux [parties] égales dont la première sera le triangle ADE, et l'autre sera le trapèze DBCE*[21].

Questions :

1) Exprimer en termes modernes les informations contenues dans l'extrait précédent.

2) Montrer, avec les données du texte, que $AC = \sqrt{2}\,AE$. Votre construction vérifie-t-elle la relation énoncée par Platon de Tivoli ?

3) Montrer, à l'aide d'un théorème vu en classe, l'égalité précédente.

Enfin, les constructions proposées par les auteurs médiévaux font principalement appel aux résultats des triangles semblables. Dans ce cas, le résultat central de la démonstration repose sur la proposition 19 du Livre VI des *Éléments*[22], à savoir : « Les triangles semblables sont l'un relativement à l'autre dans le rapport doublé [de celui] des côtés homologues. » D'autres démonstrations reposent, quant à elles, sur la construction d'une moyenne proportionnelle[23].

CONCLUSION

Introduire une perspective historique dans son enseignement est une tâche difficile. L'activité ici présentée procure un triple niveau d'introduction en fonction de la culture personnelle de l'enseignant et de ses objectifs pédagogiques. L'histoire des mathématiques peut d'abord fournir un choix d'exercices originaux au sens où, à notre connaissance, ils

[20] Euclide, *Les éléments*, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, Presses Universitaires de France, Paris, vol. 2, 1994, p. 159.

[21] M. Curtze, « Der Liber Embadorum des Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli », *Abhandlungenn zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften*, vol. XII, 1902, p. 131-132.

[22] Euclide, *Les éléments*, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, Presses Universitaires de France, Paris, vol. 2, 1994, p. 199.

[23] M. Moyon, « *La division des figures planes comme source de problèmes pour l'enseignement de la géométrie* », in *Actes de la Rencontre des IREM du Grand Ouest et de la réunion de la Commission Inter-IREM Epistémologie et Histoire des mathématiques*, Jean-Pierre Escofier et Gérard Hamon (éds), IREM de Rennes - Université de Rennes 1, Rennes, 2009, p. 81-82.

n'apparaissent pas traditionnellement dans les manuels scolaires. Elle peut ensuite être considérée comme une « mise en culture » de la science afin de montrer que l'activité mathématique s'est souvent inscrite dans un contexte socioculturel qu'il ne faut pas négliger. Dans ce cas, l'enseignant pourra se limiter à une présentation des problèmes de division des figures grâce au propos historique liminaire. Enfin, elle peut être envisagée en prenant appui sur la lecture et l'étude de textes anciens. C'est pour cela que j'offre ici la traduction française de plusieurs extraits de textes latins médiévaux qui sont largement à la portée des élèves de l'enseignement secondaire.

ÉLÉMENTS DE BIBLIOGRAPHIE

SOURCES

BAR HIYYA Abraham, *Chibbur ha-Meschicha we ha-Tischboreth*. Edition de Michael Guttmann, Schriften des Vereins Mekize Nirdamin, Berlin, 1912.

ABÛ L-WAFÂ', *Kitâb fî mâ yahtâju ilayhi as-sani^c min a^{c}mâl al-handasa* [Livre de ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques], édition de al-^{c}Ali, Imprimerie de Bagdad, Bagdad, 1979.

BONCOMPAGNI Baldassare, *La practica geometriae di Leonardo Pisano*, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, Rome, 1862.

CLAGETT Marschall, *Archimedes in the Middle Ages. Vol. 5 : Quasi-archimedian Geometry in the Thirteenth Century*, University of Wisconsin publications, Philadelphie, 1984.

CURTZE Maximilian, « Der Liber Embadorum des Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli », *Abhandlungenn zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften*, vol. XII, 1902, p. 1-183.

DOCUMENTATION

BARBIN Évelyne, « L'arithmétisation des grandeurs », *Repères IREM*, n°68, 2007, p. 5-20.

DJEBBAR Ahmed, *Textes géométriques arabes* (IX^e-XV^e siècles), IREM de Dijon, Dijon, 2009.

MOYON Marc, « *La division des figures planes comme source de problèmes pour l'enseignement de la géométrie* », in *Actes de la Rencontre des IREM du Grand Ouest et de la réunion de la Commission Inter-IREM Epistémologie et Histoire des mathématiques*, Jean-Pierre Escofier et Gérard Hamon (éds), IREM de Rennes - Université de Rennes 1, Rennes, 2009, p. 71-86.

POUR ALLER PLUS LOIN

DJEBBAR Ahmed, « La géométrie du mesurage et du découpage dans les mathématiques d'al-Andalus (X^e-XIII^e s.) », in *Liber Amicorum Jean Dhombres*, Patricia Radelet de Grave (éd), Centre de recherche en histoire des sciences, Louvain la Neuve, 2007, p. 113-147.

EUCLIDE, *Les éléments*, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, Presses Universitaires de France, Paris, vol. 1, 1990 ; vol. 2, 1994 ; vol. 3, 1998 ; vol. 4, 2001.

FRIBERG Jöran, *Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics*, World Scientific Publishing Company, Singapore, 2007.

GUTAS Dimitri, *Pensée grecque, culture arabe*, Aubier, Paris, 2005.

HUGHES Barnabas, *Fibonacci's De Practica Geometrie*, Springer, New York, 2008.

MOYON Marc, *La géométrie pratique en Europe en relation avec la tradition arabe, l'exemple de mesurage et du découpage : Contribution à l'étude des mathématiques médiévales*, Thèse de doctorat en Épistémologie et Histoire des Sciences sous la direction de Ahmed Djebbar, Lille, 2008.

Disponible sur le portail de ressources en ligne IRIS : https://iris.univ-lille1.fr/dspace/handle/1908/1592

MOYON Marc, « Mathématiques et interculturalité: l'exemple de la division des figures planes », in *Mathématiques et interculturalité*, Saïd Belmehdi et Marc Moyon (éds), Lille, avril 2009, à paraître.

Conférence visible sur Lille1-TV : http://lille1tv.univ-lille1.fr/tableau.aspx (rubrique colloque, avril 2008)